**ЧИСЛА НА КАТАЛАН**

**Ст. Капралов – НЛШИ – Габрово, 2008, допълнена - Wikipedia**

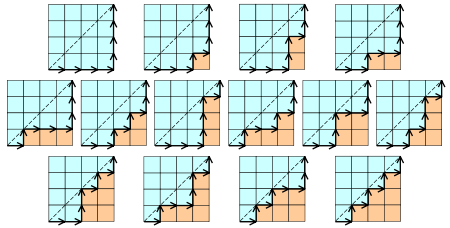
Числата на Каталан Cn, n=0, 1, 2, … са наречени така в чест на белгийския математик Йожен Чарлз Каталан (1884 – 1894). Първите няколко числа на Каталан са представени в следната таблица:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| cn | 1 | 1 | 2 | 5 | 14 | 42 | 132 | 429 | 1430 | 4862 | 16796 | 58786 | 208012 | 742900 |

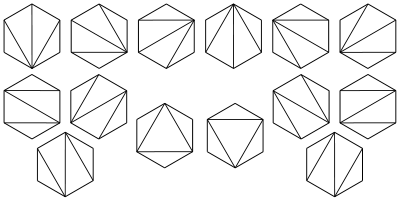
Съществуват много различни определения на числата на Каталан. Една възможна дефиниция е: = , n≥0 /или = /. Числото Cn е четно, тогава и само тогава, когато n е степен на 2.

Известни са повече от 60 интерпретации на числата на Каталан. Броят на елементите във всяко от следните множества е равен на Cn.

1/ пътища в мрежа от (0, 0) до (n, n) при движение само нагоре и надясно /C4=14/:



2/ начини за разрязване (триангулация) на изпъкнал (n+2)-ъгълник на n на брой триъгълника посредством n-1 непресичащи се диагонали /С4 = 14/:

[](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Catalan-Hexagons-example.svg)

3/ начини за представяне на n двойки скоби в произведение от n+1 множителя:

При n = 3, C3=5: (((ab)c)d), ((a(bc))d), (a(b(cd))), (a((bc)d)) и ((ab)(cd))

4/ броят на правилните последователности от скоби с дължина 2n:

При n = 3, C3=5: ((())), (())(), (()()), ()(()) и ()()()

5/ по-общ случай на горното е броя на **Dyck** думите с дължина 2n. Dyck думата е дума във формалния език Dyck и представлява низ, състоящ се от n на брой Х и n на брой Y, в който броя на Y до дадена позиция не надхвърля броя на Х до тази позиция.

При n = 3, C3=5: XXXYYY, XYXXYY, XYXYXY, XXYYXY и XXYXYY

6/ двоични дървета с n върха /C3=5/ 

7/ двоичните дървета с n листа

Например израза (a((bc)d))(ef) се представя с дървото:

8/ начини за запълване на дадената фигура с правоъгълници /С4 = 14/



9/ брой начини, по които 2n точки от една окръжност могат да се съединят с непресичащи се хорди

10/ брой начини по които 2n души, седнали около кръгла маса могат да се здрависат, без никои две двойки да си кръстосат ръцете

11/ броят на планинските вериги, които могат да бъдат начертани с n черти нагоре и n черти надолу

12/ брой растящи редици от естествени числа a1, a2, …an, за които ai≤i

111 112 113 122 123

13/ брой пермутации a1, a2, …an, на числата 1, 2, ..., n, които не съдържат намaляваща подредица от 3 или повече числа: 123 132 213 231 312

14/ брой пермутации на първите n естествени числа, така че никои три числа от получената последователност не са в нарастващ ред. Американският математик Доналд Кнут изказва хипотезата, че за всяко естесвено число n броя пермутации, в които няма три числа в нарастващ ред, е число на Каталан Cn.

При n = 1, пермутацията е единствена.

При n = 2 пермутациите са 2: 12 и 21.

При n = 3 пермутациите са 5: 132, 213, 231, 312, 321; само 123 не удовлетворява изискването.

При n = 4 пермутациите са 14, и т.н.

15/ брой пермутации a1, a2, …an, на числата 1, 2, ..., n, които могат да бъдат сортирани с използването на стек: 123 132 213 312 321

**ТРИЪГЪЛНИК НА КАТАЛАН**

Триъгълникът на Каталан е „орязан“ триъгълник на Паскал и има следното свойство – всеки елемент на реда, без последния, който е 1, е сума от елементите отгоре и отляво. В първата колона се получават числата на Каталан.

1

1

1 1

2 1

2 3 1

5 4 1

5 9 5 1

14 14 6 1

14 28 20 7 1

42 48 27 8 1

42 90 75 35 9 1

132 165 110 44 10 1

132 297 275 154 54 11 1

Чрез него можем да интерпретираме чрез задачата за правилния израз със скоби – движението дясно-надолу съпоставяме на отваряща скоба (, а движението ляво надолу – на затваряща скоба ). Пътят завършва в първа колона, ако броя на отварящите и затварящите скоби е равен. пътят пресича тази вертикална линия, веднага след като броя на затварящи скоби надвишава броя на отварящите. Правилното разкриване на скобите означава пътя да спре във първа колона, без да я пресича. Така, че правилното разкриване на скобите съответства на път в триъгълника на Каталан: всяко число в триъгълника е равно на броя пътища, по които може да се достигне до съответната точка, тръгвайки от върха.

**ПРЕСМЯТАНЕ НА ЧИСЛАТА НА КАТАЛАН**

**I НАЧИН – ДИНАМИЧНО ЧРЕЗ ТАБЛИЦА**

**Зад. 1.** (1999). Дадена е следната фигура. Да се изведе броя начини, по които може да се премине от точка А до точка В, като може да се движим само в посока надясно и надолу.

1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  | В |

1

2

При n=1 начините са 2:

1

|  |  |
| --- | --- |
| 1 | 2  2 |
| 1 | 5  3 |

При n=2, начините са 5.

1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2  2 |  |
| 1 | 3 | 5  5 |
| 1 | 4 | 14  9 |

При n=3, начините са 14.

Броят начини са числата на Каталан. Задачата се свежда до пресмятане на n-тото число на Каталан.

Можем да решим тази задача чрез динамично оптимиране – ще попълним таблица с пресметнатите вече стойности по следния начин: броя на пътищата до всяка точка е сума от броя на пътищата до двете съседни /предходни/.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | 132 | 429 |
|  |  |  |  |  | 42 | 132 | 197 |
|  |  |  |  | 14 | 42 | 90 | 165 |
|  |  |  | 5 | 14 | 28 | 48 | 75 |
|  |  | 2 | 5 | 9 | 14 | 20 | 27 |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0,0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Ще напишем програмен фрагмент за пресмятане на числата на Каталан.

**I начин – чрез двумерен масив**

* Попълваме ред 0 с 1
* На всеки следващ ред първият разглеждан елемент ще е елемента вляво от втория диагонал и ще има стойност 0, а стойностите на останалите елементи са сума от елемента вляво и елемента отдолу.
* Числата **по** втория диагонала са търсените числа на Каталан.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | 0 | 132 |
|  |  |  |  | 0 | 42 | 132 |
|  |  |  | 0 | 14 | 42 | 90 |
|  |  | 0 | 5 | 14 | 28 | 48 |
|  | 0 | 2 | 5 | 9 | 14 | 20 |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

#include<iostream>

using namespace std;

int main()

{

int c[21][21], i, j, n;

cin>>n;

for (j=0; j<=n; j++) c[0][j]=1;

for (i=1; i<=n; i++)

{

c[i][i-1]=0;

for (j=i; j<=n; j++)

c[i][j] = c[i-1][j] + c[i][j-1];

}

for (i=1; i<=n; i++) cout << c[i][i]<<" ";

return 0;

}

**II начин – чрез едномерен масив**

* Запълваме първоначално масива с 1
* Обхождаме n пъти елементите
  + За всеки обход първите i елементи запазват стойността си, а елементът от i+1 нататък е равен на старата си стойност + елемента вляво
* След n-тия обход масивът съдържа числата на Каталан

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |  |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | Първоначален обход – запълване с 1 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | I от общо n обхода – елемента е равен на себе си + ел. вляво |
| Запазват стойността си | |
| 1 | 1 | 2 | 5 | 9 | 14 | 20 | 27 | 35 | II от общо n обхода и т.н. |
| Запазват стойността си | | |

#include<iostream>

using namespace std;

int main()

{

int c[21], i, j, n;

cin>>n;

for (i=0; i<=n; i++) c[i]=1;

for (i=1; i<=n; i++)

for (j=i+1; j<=n; j++)

c[j] = c[j] + c[j-1];

for (i=1; i<=n; i++) cout << c[i]<<" ";

return 0;

}

**III начин** – пак чрез едномерен масив, но започваме масива с нулеви стойности, само първият елемент е 1. Така спестяваме писането на Iя цикъл.

#include<iostream>

using namespace std;

int main()

{

int c[21]={0}, i, j, n;

cin>>n;

c[0]=1;

for (i=0; i<=n; i++)

for (j=i+1; j<=n; j++)

c[j] += c[j-1];

for (i=1; i<=n; i++) cout << c[i]<<" ";

return 0;

}

**Зад. 2.** Баба Мравка тръгнала да обикаля за храна и попаднала на стълбище. Всяко от стъпалата е направено от блокове с квадратно сечение. Мравката бърза, но е и предпазлива и като една много дисциплинирана мравка се движи само по фугите на стълбището, т.е. само по хоризонталните и вертикалните прави и никога там, където вървят хората. Мравката се качва само по страничната част на стълбището и не си губи времето, т.е. не пълзи хаотично, а строго насочено към върха на стълбището.

Тук въпросът е колко са различните възможни маршрути, ако мравката спазва горните правила? Да се състави програма, която по въведено естествено число N от интервала [2..20] извежда броя възможни къси маршрути (числа на Каталан).

Дадени са примери за различен брой стъпала: 1:1, 2:2, 3:5, 4:14, 5:42, 6:132, 7:429, 8:1430, 9:4862.

**II НАЧИН ЗА ПРЕСМЯТАНЕ – ЧРЕЗ БИНОМНИТЕ КОЕФИЦИЕНТИ**

**Зад. 3.** Да се пресметнат броя начини, по които от n елемента избираме k елемента, т.е. да се пресметне Биномния коефициент .

Например: ={1, 2, 3, 4, 5}, =1 начин

Биномните коефициенти участват в триъгълника на Паскал /стойностите над главния диагонал са 0/.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k  n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | 1 |  | | | | | |
| 1 | 1 | 1 |  | | | | |
| 2 | 1 |  | 1 |  | | | |
| 3 | 1 |  |  | 1 |  | | |
| 4 | 1 |  |  |  | 1 |  | |
| 5 | 1 |  |  |  |  | 1 |  |
| 6 | 1 |  |  |  |  |  | 1 |

Формулата на биномния коефициент е: =

Числата на Каталан се смятат по формулата: = .

Например: =

Алгоритъм за пресмятане на :

* Умножаваме I число по II и резултата делим на 2
* Умножаваме резултата по III число и полученото делим на 3 и т.н.

Освен това =, така че, ако k>n/2 можем да го заменим с n-k. /Например =/

long long r = 1;

for (int i =1; i<=k; i++)

r = r\*(n-i+1)/i;

**Зад. 4.** Да се намерят първите 50 числа на Каталан. Колко цифри има C50?

**III НАЧИН ЗА ПРЕСМЯТАНЕ – ЧРЕЗ ВЕКТОРИ /Рекурентна зависимост/**

Дадени са векторите и .

*–* скаларно произведение

*–* конволюция

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 1 | 2 |  |  |  |  |  |  |  |

На n-та позиция е конволюцията на предишната редица със себе си. Пишем я два пъти – в прави и обратен ред, умножаваме по двойки и събираме.

1 1 2

2 1 1

1\*2 + 1\*1 + 2\*1 = 2 + 1 + 2 = 5

=> на позиция 3 пресметнахме стойност 5 => C3 = 5

Аналогично: 1 1 2 5

5 2 1 1

1\*5 + 1\*2 + 2\*1 + 5\*1 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14 => С4 = 14 и т.н.

И така, стигаме до следната рекурентна зависимост:

c0 = 1,

cn = c0cn-1 + c1cn−2 + · · · + cn−1c0,при n = 0, 1, 2, 3....

**Зад. 4.** Да се намери броя на двоичните дървета с n върха.

Решение: Този брой е равен на Cn.

при n=0 – дървото е едно, празното

при n=1 – дървото е едно

при n=2 – дърветата са две

при n=3 – дърветата са пет:

и т.н.

при n=9 – броя на дърветата се получава по следния начин:

дърво с дърво с дърво с дърво с дърво с дърво с

0 върха 8 върха 1 върха 7 върха 2 върха 6 върха ….

и т.н. възможностите са общо 9 (освен изброените, още (3,5), (4,4), (5,3), (6,2), (7,1), (8,0)).

За всяка от тези възможности броя на дърветата е Ck1\*Ck2, където k1 и k2 са броя на върховете в съответните поддървета. И така стигаме до формулата:

C9 = C0\*C8 + C1\*C7 + C2\*C6 + C3\*C5 + C4\*C4 + C5\*C3 + C6\*C2 + C7\*C1 + C8\*C0

**Зад. 5.** Да се намери броя на правилните последователности от скоби с дължина 2n.

Разглеждаме произволен аритметичен израз, от който премахваме всичко, освен скобите. Получената последователност от скоби ще наричаме правилна. Всяка правилна последвателност от скоби се състои от равни отварящи и затварящи скоби, подредени по определен начин, например (()) е правилна последователност, а )()( - не е правилна. Точното определение за правилна последователност е:

- Празната последователност от скоби е правилна.

- Ако А е правилна последователност, то и (А) е правилна.

- Ако А и В са правилни последователности от скоби, то и АВ е правилна последователност.

Решение:

За малки стойности може лесно да се изчисли:

При n = 0 => C0 = 1 /празната последователност/

При n = 1 => C1 = 1 /последователността ()/

При n = 2 => C2 = 2 /последователности (()) и ()()/

При n = 3 => C3 = 5 /последователности ((())), (()()), (())(), ()(()) и ()()()/

Следователно броят на правилните последователности с дължина 2n /n-отварящи и n-затвярящи скоби/ е числото на Каталан Cn.

Търсим рекурантна зависимост, за да изразим Cn. Нека Х е произволна правилна последователност от скоби с дължина 2n. Тя започва с отвряща скоба. Намираме съответстващата й затваряща скоба и преставяме последователността Х във вида: Х = (А)В, където А и В са също правилни последователности. Нека 2\*k е дължината първата последователност А. Тогава А може да се състави по Ck на брой начини. За В остава дължина 2\*(n-k-1) и следователно начините за съставяне са Cn-k-1. Тогава броя на начините за съставяне на тази последователност е Ck\* Cn-k-1. Стойността на k се изменя от 0 до n-1. И така получаваме

c0 = 1,

cn = c0cn-1 + c1cn−2 + · · · + cn−1c0,при n = 0, 1, 2, 3....

Следва и програмната реализация:

int Catalan(int n)   
{   
  int C[n+1];   
  C[0]=1;   
  for (int m=1; m<=n; ++m)      
  {   
    C[m]=0;   
    for (int k=0; k<m; ++k)   
      C[m]+=C[k]\*C[m-1-k];   
  }   
  return C[n];   
}

**IV НАЧИН – ЧРЕЗ ФОРМУЛИ /Рекурентна зависимост/**

c0 = 1,

cn+1 = , при n = 0, 1, 2, 3, …,

**Зад. 6.** Директор дава на секретарката си n писма, които тя трябва да набере на компютър. Директорът поставя писмата едно върху друго по ред 1, 2, ..., n, а секретарката, когато се окаже свободна от останалите си задължения, взема най-горното писмо и го обработва, като понякога обработва повече от 1 писмо. Ето две примерни възможности за реда на обработване на 7 писма: 1, 2, 5, 4, 3, 7, 6 или 3, 2, 5, 4, 6, 7, 1, докато редицата 4, 6, 5, 7, 2, 3, 1 е невъзможна.

Да се намери броя на различните начини на обработка на писмата. Ако имаме лексикографксо подреждане на различните подредби, при зададено k да се извежда съответната подредба на писмата.

Решение:

Тук имаме пермутации, но възниква въпросът дали всички пермутации са възможни.

При n = 1 броя начини е 1, при n = 2, броя начини е 2, но при n = 3 подредбата 3 1 2 не е възможна, и тогава броя начини става 5 /(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1) и (3,2,1)/.

До тук виждаме числата на Каталан. Ще покажем, че наистина са те.

Целият процес може да се представи като последователност от n включвания в стек и n изключвания от стека, като във всеки един момент броят на изключванията не може да бъде по-голям от броя на включванията.. Нека означим с Х операцията „включване в стек“, а с Y – операция „изключване от стека“.

При n = 3

1 2 3 – XYXYXY

1 3 2 – XYXXYY

2 1 3 – ...

2 3 1 – ...

3 2 1 – XXXYYY

Във всеки момент броя на Х трябва да е >= на броя на Y операциите /не можем да изключим нещо, ако не сме го включили. Поради тази причина и подредбата 3 1 2 не е възможна.

Можем да видим приликата на тази задача и със задачата за скобите – операция Х съответства на (, а операция Y – на ).

Можем също да я илюстрираме и с движение надясно и нагоре без да преминваме над диагонала /при всяко включване се придвижваме дo съседната целочислена точка надясно, а при изключване от стека – до съседната точка нагоре. Нека P(x, y) е броят на различните пътища с начало (0,0) и край (x, y), които са получени чрез последователниост от стъпка надясно и стъпка нагоре и не минават над ъглополовящата на първи квадрант. Ако в дадена точка може да се дойде както отляво, така и отдолу, то P(x, y) = P(x − 1, y) + P(x, y − 1). Ако няма съсед отляво или съсед отдолу, едното от събираемите отпада. Оказва се, че по правата y = x последователно са разположени числата на Каталан 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429 и т.н.

Как да намерим подредба по зададен номер, например при n = 6 и k = 64?

Лексикографската подредба на числата не води до лексикографска подредба на операциите.

При n = 6 => възможните начини /подредби/ са 132.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  | 132 |
|  |  |  |  |  | 42 | 132 |
|  |  |  |  | 14 | 42 | 90 |
|  |  |  | 5 | 14 | 28 | 48 |
|  |  | 2 | 5 | 9 | 14 | 20 |
| **B** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Y  X  0 | 1  X | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**A**

1. XXXXXXYYYYYY

2. …

…

64. Търсим пътя под номер 64

...

132. XYXYXYXYXYXY

Път ХХ е преди път XY. Сумата от начините от А до края и от В до края е точно 132.

Сега ще попълваме таблицата отзад – напред.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | 1 | 1 |
|  |  |  |  | 2 | 2 | 1 |
|  |  |  | 5 | 5 | 3 | 1 |
|  |  | 14 | 14 | 9 | 4 | 1 |
|  | 42 | 42 | 28 | 14 | 5 | 1 |
| Y  X  0 | 132 | 90 | 48 | 20 | 6 | 1 |

X

90 начина започват с ХХ, останалите 42 – с XY = >

1. XXXXXXYYYYYY

2. …

…

48. XXX…

49. XXY..

...

64. XXYXYXXXYYYY

…

90. XX…

91. XY…

…

132. XYXYXYXYXYXY

Нека k=100. Започваме по таблицата от 132 (Х). 132 = 90 + 32

Тъй като 100>90, разглеждаме групата от 90 нагоре (Y)

От нея търсим 10-тото число => тръгваме надясно (X)

От 28 тръгваме пак надясно, защото 10-тото число е <28 (Х) и т.н. ...

Получаваме: XYXXXYYXXYY

**Зад. 7.** Дадена е пермутацията a1a2…an. Една пермутация е лоша, ако има 3 индекса i, j и k, ...ai…aj…ak…, така че ai > aj > ak. Да се намери броя на хубавите пермутации.

Пример: При n = 4 всички пермутации са 24, от които лошите са 10, хубавите са 14 = С4.

1 2 3 4, 1 2 4 3, 1 3 2 4, 1 3 4 2, 1 4 2 3, ~~1 4 3 2~~, 2 1 3 4, 2 1 4 3, 2 3 1 4, 2 3 4 1, 2 4 1 3, ~~2 4 3 1~~,   
3 1 2 4, 3 1 4 2, ~~3 2 1 4~~, ~~3 2 4 1~~, 3 4 1 2, ~~3 4 2 1~~, 4 1 2 3, ~~4 1 3 2~~, ~~4 2 1 3~~, ~~4 2 3 1~~, ~~4 3 1 2~~, ~~4 3 2 1~~

Допълнение към условието: Ако подредим хубавите пермутации една след друга, при зададена пермутация да се изведе следващата. Ако дадената пермутация е последната, да се изведе първата  
(1, 2, 3...n).

**Зад. 8.** Даден е n-ъгълник. По колко начина може да се разреже на триъгълници по диагоналите, без диагоналите да се пресичат.

Решение: Първи Ойлер решава дадения проблем по следния начин:

При n = 3 – начинът е един – не е нужно разрязване

При n = 4 – начините са 2, При n = 5 – начините са 5

При n = 6 – начините са 14

При n = 7 – изрязваме триъгълник и така фигурата се разделя на 2 фигури, вариантите са следните: остава 6-ъгълник => 2 варианта => 2.14 = 28

3-ъгълник и 5-ъгълник => 2 варианта => 2.1.5 = 10

2 4-ъгълника => 2.2 = 4

=> 28 + 10 + 4 . 42 и т.н. за следващите стойности на n.

**Зад. 9.** На окръжност има 18 точки. По колко начина може да ги разделим на двойки, така че съответстващите им хорди да не се пресичат? Отг. 1430

**Зад. 10.** По колко начина можем да преминем от долен ляв ъгъл до горен десен ъгъл на шахматната дъска само с ходове от една клетка в нагоре или надясно без да се преминава над диагонала a1-h8?

**Зад. 11.** По колко начина могат да се разположат числата от 1 до 2n в таблица от 2 редa и n стълба така, че във всеки ред числата отляво надясно да нарастват и всяко число от по-долния ред да е по-малко от числото над него?

**Зад. 12.** Двама души играят следната игра: Един от тях измисля цяло число от между 1 и 144, а вторият се опитва да отгатне чрез задаване на въпроси, на които първият отговаря честно с Да или Не. Ако отговорът е Да, вторият плаща 1 рубла, а ако е Не – плаща 2 рубли. Как трябва да играе вторият играч, за да направи загубата си в най-лошия случай минимална? Как той трябва да процедира, ако вместо до 144, ограничението е друго число?

# Числа Каталана и теория вероятностей

## Билеты в театр и хождение по треугольнику Паскаля

Зад. У театральной кассы стоит очередь за билетами из *2n* человек. Билет стоит пять рублей, а в наличии у каждого из стоящих в очереди есть ровно одна банкнота — либо пять, либо десять рублей, причем каждый из двух видов банкнот встречается ровно у *n* человек. У кассира в начальный момент нет пятирублевых банкнот. Каждый, стоящий в очереди, покупая билет, если дает десятирублевую банкноту, должен получить сдачу. Какова вероятность того, что на протяжении всей очереди у кассира всегда будет достаточный запас пятирублевых банкнот для сдачи, а в конце у него не останется пятирублевых купюр?

Хорошо известно правило, по которому строятся числа в треугольнике Паскаля.

Его нулевая строка содержит один член, равный единице. Далее, в первой строке стоят два числа, оба равные единице, происходящие от единице в нулевой строке, одно — справа от элемента нулевиой строки, другое — слева.. Вторая строка состоит из трех чисел: крайние (нулевое и второе) — единицы, а среднее — двойка, представляющая собой сумму двух единиц из первой строки. Средний элемент второй строки стоит в точности под элементом нулевой строки. В третьей строке уже четыре числа, крайние (нулевое и третье) равны единицы, а средние (первое и второе) — тройке. Каждая следующая строка содержит на один элемент больше чем предыдущая, при этом каждый элемент следующей строки равен сумме двух ближайших к нему элементов предыдущей строки: сверху слева и сверху справа. Элементы треугольника Паскаля имеют важную комбинаторную интерпретацию: элемент из *n*–й строки и *k*–го столбца обозначается через  и равен числу возможных выборов *k* различных неупорядоченных элементов из числа *n* данных. Проверка этого факта оставляется читателю в качестве приятного и полезного упражнения.

**1**

**1 1**

**1 2 1**

**1 3 3 1**

**1 4 6 4 1**

**1 5 10 10 5 1**

**1 6 15 20 15 6 1**

**1 7 21 35 35 21 7 1**

… … …..…… …… …

Треугольник Паскаля

Так, например, число *21*— второе в седьмой строке, если не считать начального (нулевого) числа *1*— равно сумме первого и второго чисел в шестой строке.

Рассмотрим начальную вершину треугольника Паскаля, в которой стоит число *1*, и будем бросать монету. При выпадении орла будем двигаться вниз и направо, а при выпадении решетки — вниз и налево. После *n* бросаний мы попадем в *n*–ю строку треугольника Паскаля на какое–то место. На этом месте будет стоять число, равное всевозможному количеству различных последовательностей исходов бросания монетки, при котором мы попадаем на это место. Так как на каждое место мы можем попасть либо сверху справа, либо сверху слева, то и соответствующее число будет равно сумме чисел, над ним стоящих. При этом, так как всего различных исходов бросания монетки существует , то этому же числу будет равна сумма всех чисел в *n*–й строке треугольника Паскаля.

Вернемся теперь к нашей задаче о числах Каталана и билетах в театр. Каждому человеку, стоящему в очереди, можно сопоставить результат бросания монетки следующим образом. Если у него в наличии пятирублевая купюра, то это соответствует выпадению орла, а если десятирублевая — выпадению решетки. Таким образом, произвольная очередь в театр, состоящая из людей с пяти– и десятирублевыми купюрами, также соответствует хождению по треугольнику Паскаля. При этом мы помним, что в задаче у нас было ограничение: в кассе всегда должно хватать пятирублевых банкнот. Это означает, что при нашем хождении мы не должны заходить левее начальной точки. Таким образом, нам нужно построить “урезанный” треугольник Паскаля — соответствующий хождению только по правой стороне. Вот как он будет выглядеть:

**1**

**1**

**1 1**

**2 1**

**2 3 1**

**5 4 1**

**5 9 5 1**

**14 14 6 1**

**14 28 20 7 1**

**42 48 27 8 1**

**42 90 75 35 9 1**

**132 165 110 44 10 1**

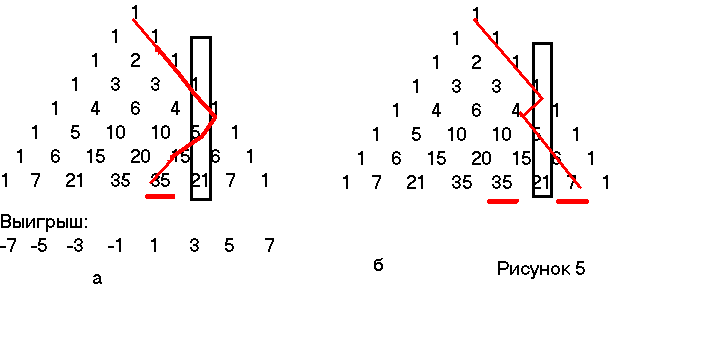
**132 297 275 154 54 11 1**

Как мы видим и как должно быть на самом деле, в столбце, расположенном под начальной точкой, как раз расположились числа Каталана — количества всевозможных “правильных” очередей в театр или правильных хождений по (урезанному) треугольнику Паскаля. Попытаемся отыскать общую закономерность построения такого треугольника.

## Принцип отражения в теории вероятностей

Продолжим наши бросания монет и хождения по треугольнику Паскаля. Попытаемся разобраться со следующей задачей. Предположим, что два человека играют в орлянку и бросают монету *n* раз. При выпадении орла первый из них выигрывает рубль, при выпадении решетки — второй. После n бросаний выигрыш первого (если первый проиграл, мы будем писать выигрыш со знаком минус) составляет некоторое число от *–n* до *n* той же четности, что и число *n*. Количества возможных исходов такого бросания записаны в *n*–й строке треугольника Паскаля. Зафиксируем число *k* от *1* до *n* той же четности, что и число n, и число *l>k*. Задача. В каком количестве случаев окончательный выигрыш первого игрока будет равен *k*, в то время как по ходу игры он никогда не выигрывает более чем *l-1*.

Очевидно, нужно рассмотреть все случаи, когда суммарный выигрыш первого игрока равен *n*, и вычесть из этого числа те случаи, когда выигрыш первого игрока доходил до *l*. Первое число как раз стоит в *n*–й строке треугольника Паскаля. Действительно, если первый игрок выиграл *k*, то О-Р=*k*, О+Р=*n*, где О и Р — количества выпадений орла и решетки соответственно. Тогда количество выпадений орла равно полусумме *n* и *k*, и нужно посмотреть в *n*–й строке треугольника Паскаля элемент, соответствующий именно такому количеству орлов. Рассмотрим теперь случаи, когда в некоторый момент выигрыш первого игрока доходит до *l*. Для каждого такого случая рассмотрим то бросание, после которого его выигрыш первый раз стал равен *l*. После этого выигрыш первого игрока каким–то образом колеблется, доходя в последний момент до числа *k*. Нарисуем соответствующий путь на треугольнике Паскаля, см. рис. 5а.



Отразим этот остаток путь относительно линии, соответствующей выигрышу *l*, т.е. заменим все шаги вниз вправо на шаги вниз влево и наоборот. Тогда мы получим путь, идущий в симметричный элемент треугольника Паскаля, соответствующий выигрышу *2l-k*. Более того, **любой** путь γ, идущий в симметричный элемент получается таким образом. Действительно, такой путь должен пересекать линию с выигрышем *l*, т.к. сначала выигрыш был меньше, чем *l* (он был просто равен нулю), а в конце выигрыш стал равен *2l-k>l*. Рассмотрим первое прохождение пути γ через выигрыш, равный *l*, а затем отразим нижнюю часть пути γ относительно прямой, соответствующей выигрышу первого игрока, равному *l*. Получим путь, заканчивающийся выигрышем *k*, в процессе которого выигрыш доходит до *l*.

Таким образом мы получаем вывод: **количество путей, оканчивающихся выигрышем *k*, во время которых выигрыш доходит до *l>k*, равно количеству путей, оканчивающихся выигрышем *2l-k*.**

Это замечательное утверждение называется *принципом отражения* в теории вероятностей.

По очевидным причинам этот же принцип применим и в случаях, когда выигрывает второй игрок.

***Пример.*** Если применить принцип отражения к ситуации, показанной на рисунке 5, мы получим, что количество исходов семи бросаний монеты, при которых окончательный выигрыш первого игрока равен единице, при этом по ходу игры он достигал трех, равен количеству исходов, при которых окончательный выигрыш равен пяти. Следовательно, интересующее нас количество исходов, при которых окончательный выигрыш равен одному, а по ходу игры выигрыш не превышал трех, равен разнице двух элементов треугольника Паскаля *35-7=28*.

***Упражнение.*** Найдите количество различных исходов десяти бросаний монеты, при которых окончательный выигрыш первого игрока равен шести, но за все время бросаний никогда не превосходит семи.